Ejercicios de Matemáticas I - Relación 3

1. Realiza las operaciones indicadas y expresa el resultado en la forma $a + i\,b$.

$$\text{i)}\ (7-2i)(5+3i) \quad \text{ii)}\ (i-1)^3 \quad \text{iii)}\ \overline{(1+i)(2+i)}(3+i) \quad \text{iv)}\ \frac{3+i}{2+i}$$
$$\text{v)}\ \frac{(4-i)(1-3i)}{-1+2i} \quad \text{vi)}\ (1+i)^{-2} \quad \text{vii)}\ \frac{1+2i}{2-i} \quad \text{viii)}\ i^2(1+i)^3$$

2. Calcula los módulos de los siguientes números complejos:

$$\text{a)}\ (-1+i)^9(2-i) \quad \text{b)}\ \frac{5-\sqrt{3}i}{\sqrt{2}-i(\sqrt{5}+1)} \quad \text{c)}\ \frac{(2+i\sqrt{5})(1+i\sqrt{3})^3}{\sqrt{5}+i\sqrt{3}}$$

3. Calcula los números complejos $z = x + iy$ tales que el número $w = \dfrac{z-2+i}{z-1+2i}$ es:

   a) Un número real.
   b) Un número imaginario puro.
   c) Un número de módulo 1.

4. Expresa en forma polar los siguientes números complejos.

$$\text{a)}\ -\sqrt{3}-i \quad \text{b)}\ -\sqrt{3}+i \quad \text{c)}\ \frac{3}{\sqrt{3}+i} \quad \text{d)}\ \frac{1+i\sqrt{3}}{(1+i)^2}$$

5. Expresa los siguientes números en la forma $a + ib$:

$$\text{a)}\ (-1+i\sqrt{3})^{11} \quad \text{b)}\ \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{16} \quad \text{c)}\ (-\sqrt{3}+i)^{13} \quad \text{d)}\ \left(\frac{-\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^{24}$$

6. Sea $z = x + i\,y$. Supuesto que $|z| = 1$, $z \neq 1$, $z \neq -i$, prueba que

$$\arg\left(\frac{z-1}{z+i}\right) = \begin{cases} \pi/4 & \text{si } 1-x+y>0 \\ -3\pi/4 & \text{si } 1-x+y<0 \end{cases}$$

7. Prueba la llamada “igualdad del paralelogramo” y explica su significado geométrico.

$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2) \quad (z, w \in \mathbb{C})$$

8. Haciendo uso de la fórmula de De Moivre prueba que $\cos 4\varphi = 8\cos^4\varphi - 8\cos^2\varphi + 1$.

9. Prueba que si una ecuación polinómica con coeficientes reales admite una raíz compleja, z, entonces también admite como raíz a $\overline{z}$. Da un ejemplo de una ecuación polinómica de grado mayor que 1 que tenga como raíz compleja $1+i$ pero no admita como raíz a $1-i$.

10. Calcula las raíces de la ecuación de segundo grado $z^2 - 4iz - 4 + 2i = 0$ y exprésalas en la forma $a + ib$.

11. Calcula todas las soluciones de las siguientes ecuaciones y exprésalas en la forma $a + ib$:

$$\text{a)}\ z^4 = i \quad \text{b)}\ z^3 = -1 + i\sqrt{3} \quad \text{c)}\ z^4 - i\sqrt{3}\,z^2 - 1 = 0$$

12. Calcula las soluciones de la ecuación $z^4 + 4z^2 + 16 = 0$ y exprésalas en la forma $a + ib$.